Théorème d'Ascoli

Recasage : 201 / 203 / 205 / 228

Référence : Daniel Li cours d'analyse fonctionnelle page 191

Théorème 1

Soit (X, d) un espace métrique compact et une partie $\mathscr{F} \subseteq \left(\mathscr{C}(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\right)$. Alors $\mathscr{F}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathscr{F}$ est bornée et équicontinue.

Preuve.

$\Longrightarrow$: Supposons que $\mathscr{F}$ soit relativement compacte. Montrons alors que $\mathscr{F}$ est équicontinue et bornée.

- Comme $\mathscr{F}$ est relativement compacte alors $\overline{\mathscr{F}}$ est bornée, il en va donc de même pour $\mathscr{F}$.

- Montrons que $\mathscr{F}$ est équicontinue. Soit $x_0 \in X$ et soit $\varepsilon > 0$, comme $\mathscr{F}$ est relativement compact $\mathscr{F}$ est en particulier précompacte ; Il existe donc un nombre fini de fonctions $f_1, \cdots, f_p \in \mathscr{F}$ telles que :

$$\mathscr{F} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Comme chaque f_j sont continues en x_0 donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_j > 0 \ \forall x \in X \ d(x, x_0) \leq \delta_j \Longrightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On pose alors $\delta = \min\limits_{j \in [\![1;p]\!]} \delta_j$. Soit $f \in \mathscr{F}$ alors il existe $j \in [\![1;p]\!]$ tel que $f \in B\left(f_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)$ alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_j(x) + f_j(x) - f_j(x_0) + f_j(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(x_0)| + |f_j(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Finalement on à :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ d(x, x_0) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ceci $\forall f \in \mathscr{F}$ donc $\mathscr{F}$ est équicontinue.

$\Longleftarrow$: Supposons que $\mathscr{F}$ soit équicontinue et bornée. Montrons alors que $\mathscr{F}$ est relativement compacte. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{F}$. Montrons alors qu'il existe une sous suite de Cauchy de la suite (f_n) (pour la norme $\|.\|_\infty$) et comme $\overline{\mathscr{F}}$ est complet (fermé dans un complet) ceci assurera le fait que $\mathscr{F}$ est relativement compacte. Le théorème de Heine assure que $\mathscr{F}$ est uniformément équicontinue c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in X \ d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad \forall f \in \mathscr{F}$$

Comme $\mathscr{F}$ est bornée alors il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$. On considère $\Delta = \{x_1, x_2, \cdots\}$ une partie dénombrable dense de X (qui existe car X est compacte donc séparable). Ainsi on à donc $\forall n \geq 1 \ \forall k \geq 1 \ |f_n(x_k)| \leq M$.

La suite numérique $\big(f_n(x_1)\big)$ étant bornée, on peut en extraire une sous suite convergente (d'après le théorème de Bolzano Weierstrass) noté $\big(f_{1,n}(x_1)\big)$. Plaçons nous en x_2 la suite $\big(f_{1,n}(x_2)\big)$ est une suite bornée donc on peut également en extraire une sous suite convergente noté $\big(f_{2,n}(x_1)\big)$. On peut donc récursivement extraire des sous suites $\big(f_{q,n}(x_k)\big)$ convergente pour $1 \leq k \leq q$. En vertu du procédé d'extraction diagonale on pose $g_n(x_k) = f_{n,n}(x_k)$ qui est une sous suite convergente pour toute les valeurs de x_k pour $k \leq n$.

Montrons maintenant que la suite (g_n) est de Cauchy pour la norme uniforme. Pour $k \geq 1$ soit $\delta > 0$. Comme Δ est dense dans X alors :

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta)$$

Comme X est compacte, d'après la propriété de Borel-Lebesgue on peut en extraire un sous recouvrement finie soit $K \geq 1$ tel que :

$$X = \bigcup_{k=1}^{K} B(x_k, \delta)$$

Comme la suite $\big(g_n(x_k)\big)_n$ est convergente elle est donc de Cauchy donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_k \geq 0 \ \forall n, m \geq N_k \quad |g_n(x_k) - g_m(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Posons alors $N = \max\limits_{k \in [\![1;K]\!]} N_k$ et soit $x \in X$ alors il existe $k \leq K$ tel que $x \in B(x_k, \delta)$ alors $d(x, x_k) \leq \delta$. Alors pour $m, n \geq N$

$$\begin{aligned}
|g_m(x) - g_n(x)| &= |g_m(x) - g_m(x_k) + g_m(x_k) - g_n(x_k) + g_n(x_k) - g_n(x)| \\
&\leq |g_m(x) - g_m(x_k)| + |g_m(x_k) - g_n(x_k)| + |g_n(x_k) - g_n(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \geq 0 \ \forall n, m \geq N \ \|g_m - g_n\|_\infty \leq \varepsilon$ donc (g_n) est une suite de Cauchy de $\Big(\mathscr{C}(X, \mathbb{C}), \|.\|_\infty\Big)$ qui est un espace de Banach donc converge. Ainsi de toute suite de $\overline{\mathscr{F}}$ on peut en extraire une sous suite convergente donc $\mathscr{F}$ est relativement compacte.

■

Remarque.

- Il faut absolument connnaitre une application du Théorème d'Ascoli
- Savoir expliquer le procédé d'extraction diagonale
- Pourquoi compacte implique séparable (Preuve ci dessous Rombaldi Éléments d'analyse réelle page 22)

  Preuve.
  Soit (E, d) un espace métrique compact, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ on peut extraire du recouvrement $E = \bigcup_{x \in E} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ un sous recouvrement fini $E = \bigcup_{x \in D_n} B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ avec D_n une partie finie de E. Montrons alors $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dense dans E. Pour $a \in E$ et $\varepsilon > 0$ en prenant $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ (possible car $\frac{1}{n}$ tend vers 0 donc on peut trouver un tel n). Ainsi il existe $x \in D_n$ tel que $a \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ donc $d(x, a) < \frac{1}{n} < \varepsilon$ et $x \in B(a, \varepsilon) \cap D)$. On a donc $D \cap B(a, \varepsilon) \neq 0$ pour tout $a \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$ ce qui signifie que D est dense dans E. En conclusion (E, d) est séparable.

- Une applications du théorème d'Ascoli est de démontrer un théorème d'existence de solutions d'équations différentielles (en extrayant une sous suite qui converge uniformément) c'est le théorème d'Arzela Peano.

Exercice d'application : (Daniel Li Exercice 8 page 194) Pour toute fonction $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ on pose alors pour $x \in [0;1]$ l'opérateur :

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\ dt$$

Montrer que $T : \mathscr{C}([0;1]) \longrightarrow \mathscr{C}([0;1])$ est un opérateur (on l'appelle opérateur de Volterra) et que cet opérateur est compact.

Montrons que Tf est un opérateur continue montrons dans un premier temps que l'application est linéaire, $\forall f, g \in \mathscr{C}([0;1])$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\lambda f + g)(x) = \int_0^x \big(\lambda f(t) + g(t)\big)\ dt = \lambda \int_0^x f(t)\ dt + \int_0^x g(t)\ dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x)$$

.

Montrons alors que T est continue $\forall x \in [0;1]$:

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^x f(t)\ dt\right| \leq \int_0^x |f(t)|\ dt \leq x\|f\|_\infty \Longrightarrow \|T(f)\|_\infty \leq x\|f\|_\infty$$

Donc T est un opérateur. Pour montrer que T est un opérateur compact on doit montrer que l'image de la boule unité de $\mathscr{C}([0;1])$ par T est relativement compact pour cela on utilise le théorème d'Ascoli on veut donc montrer que l'image de la boule unité de $\mathscr{C}([0;1])$ par T est bornée et équicontinue. On note B la boule unité :

$$B = \Big\{ f \in \mathscr{C}([0;1]) \mid \|f\|_\infty \leq 1 \Big\}$$

► Soit $f \in B$ soit $x \in [0;1]$ alors $|T(f)(x)| \leq x\|f\|_\infty \leq 1$ car $f \in B$ ainsi $T(B)$ est bornée.

► Soit $x, y \in [0;1]$ $f \in B$ alors :

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \int_y^x \|f\|_\infty\ dt \leq \|f\|_\infty |x-y| \leq |x-y|$$

Soit $\varepsilon > 0$ alors en prenant $\delta = \varepsilon$ on a $|x-y| \leq \delta \Longrightarrow |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq \varepsilon$ ce qui permet de conclure à l'équicontinuité de $T(B)$ et donc par théorème d'Ascoli l'opérateur est compact car $T(B)$ est relativement compact.